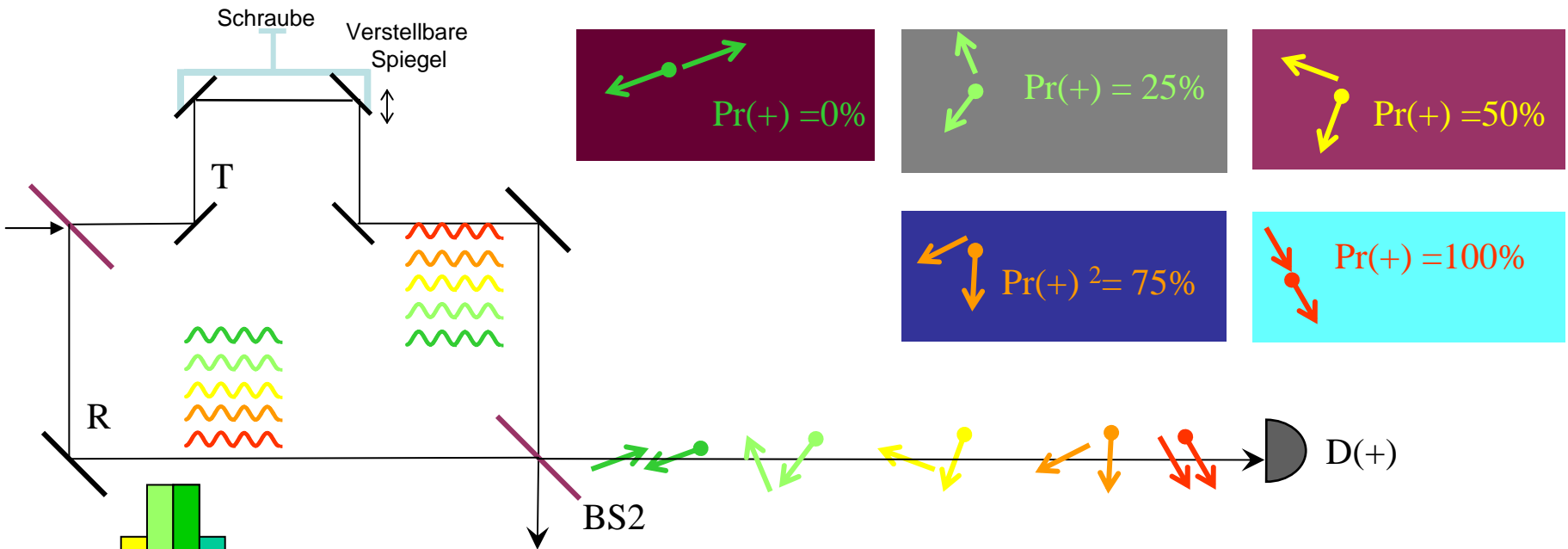


Appendix 2

Applying quantum mathematics
to 2-Particles Experiments

(Deutsche Version)

Interferenzen, Frequenz-Bandbreite, Weglänge-Differenz



l : Länge des langen Weges
 s : Länge des kurzen Weges
 ν : Frequenz des Lasers
 c : Lichtgeschwindigkeit
 $\Delta\nu$: Bandbreite

$\omega = 2\pi \nu$: Kreisfrequenz

$\Delta\omega = 2\pi \Delta\nu$

θ : Phasenunterschied der beiden Weg-Amplituden (Winkel zwischen den beiden Pfeilen)

$$\text{Für } D(+): \theta = 2\pi\nu \frac{l-s}{c} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \Phi$$

Wenn es in der Bandbreite für jede Frequenz eine andere Frequenz gibt, so dass $\Phi_2 - \Phi_1 = \pi$, die durchschnittliche Zählrate ergibt 50%.

Bedingung für versteckte Interferenz: $\Phi(\nu + \Delta\nu) - \Phi(\nu) = 2\pi$

Bedingung für gut sichtbare Interferenz in einem reellen Experiment

λ : Wellenlänge des Lasers = 657 nm

$$\nu : \text{Frequenz des Lasers} = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.6 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{657 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 4 \cdot 10^8 \text{ MHz} = 4 \cdot 10^5 \text{ GHz}$$

$\Delta \nu$: Bandbreite des Lasers $\approx 10 \text{ MHz}$

(Zum Vergleich : Bandbreite des sichtbaren Lichtes = $5 \cdot 10^5 - 10^6 \text{ GHz} = 500 \text{ GHz}$)

$l - s$: Weglänge - Differenz des Interferometers $\approx 0.5 \text{ m}$

$$\omega = 2\pi\nu \quad \Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta\nu$$

Bedingung für versteckte Interferenz: $\Phi(\nu + \Delta\nu) - \Phi(\nu) = 2\pi$

$$\Rightarrow 2\pi(\nu + \Delta\nu) \frac{l-s}{c} - 2\pi\nu \frac{l-s}{c} = 2\pi$$

$$\Rightarrow (\omega + \Delta\omega) \frac{l-s}{c} - \omega \frac{l-s}{c} = \Delta\omega \frac{l-s}{c} = 2\pi \Rightarrow \Delta\nu \frac{l-s}{c} = 1$$

Bedingung für gut sichtbare Interferenz: $\Phi(\nu + \Delta\nu) - \Phi(\nu) \ll 2\pi$

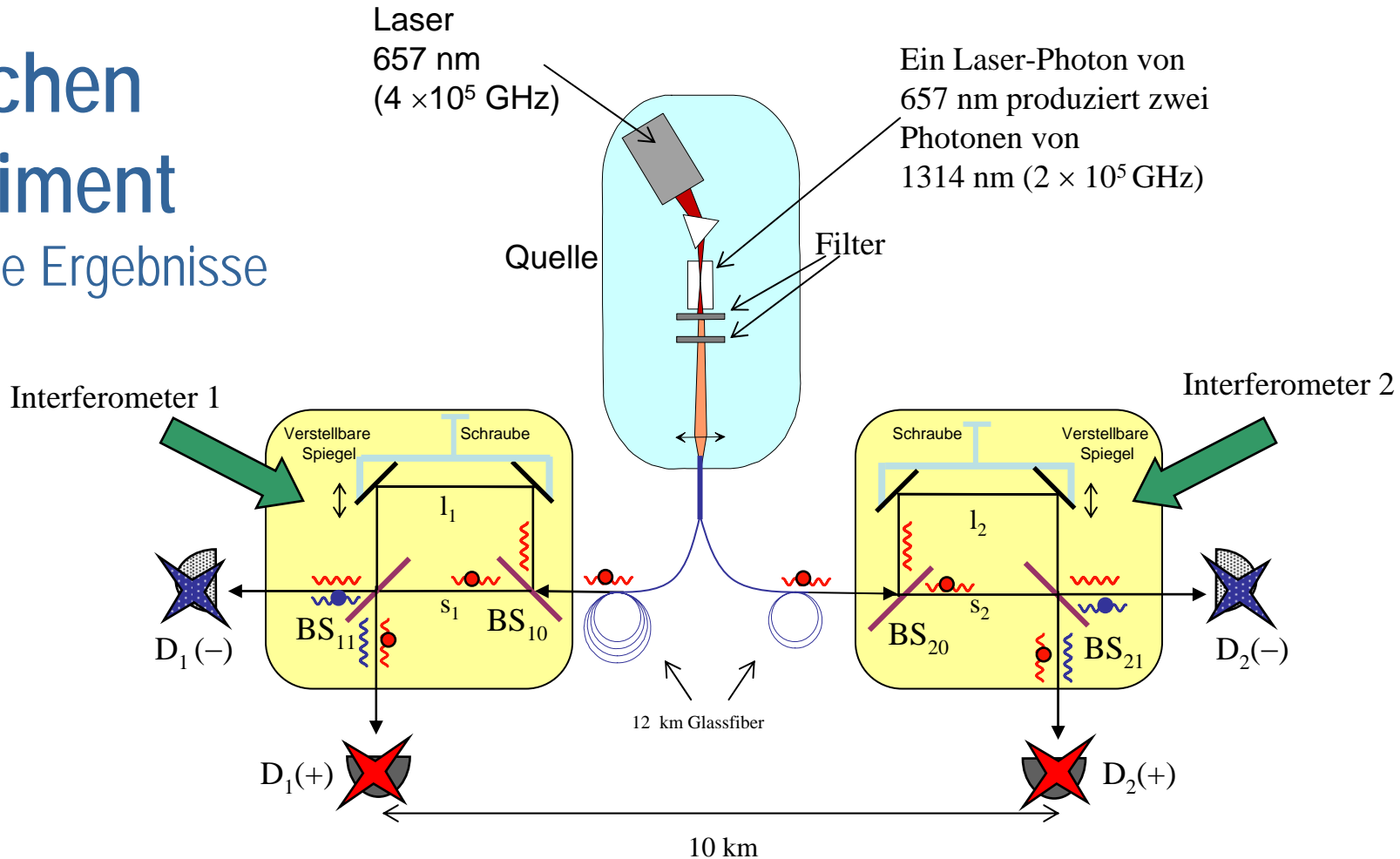
$$\Rightarrow \Delta\nu \frac{l-s}{c} \ll 1$$

$$\Rightarrow \Delta\nu \ll \frac{c}{l-s} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0.5 \text{ m}} = 600 \text{ MHz}$$

$\Delta\nu$: Bandbreite des Lasers = 10 MHz \ll 600 MHz

2-Teilchen Experiment

4 mögliche Ergebnisse

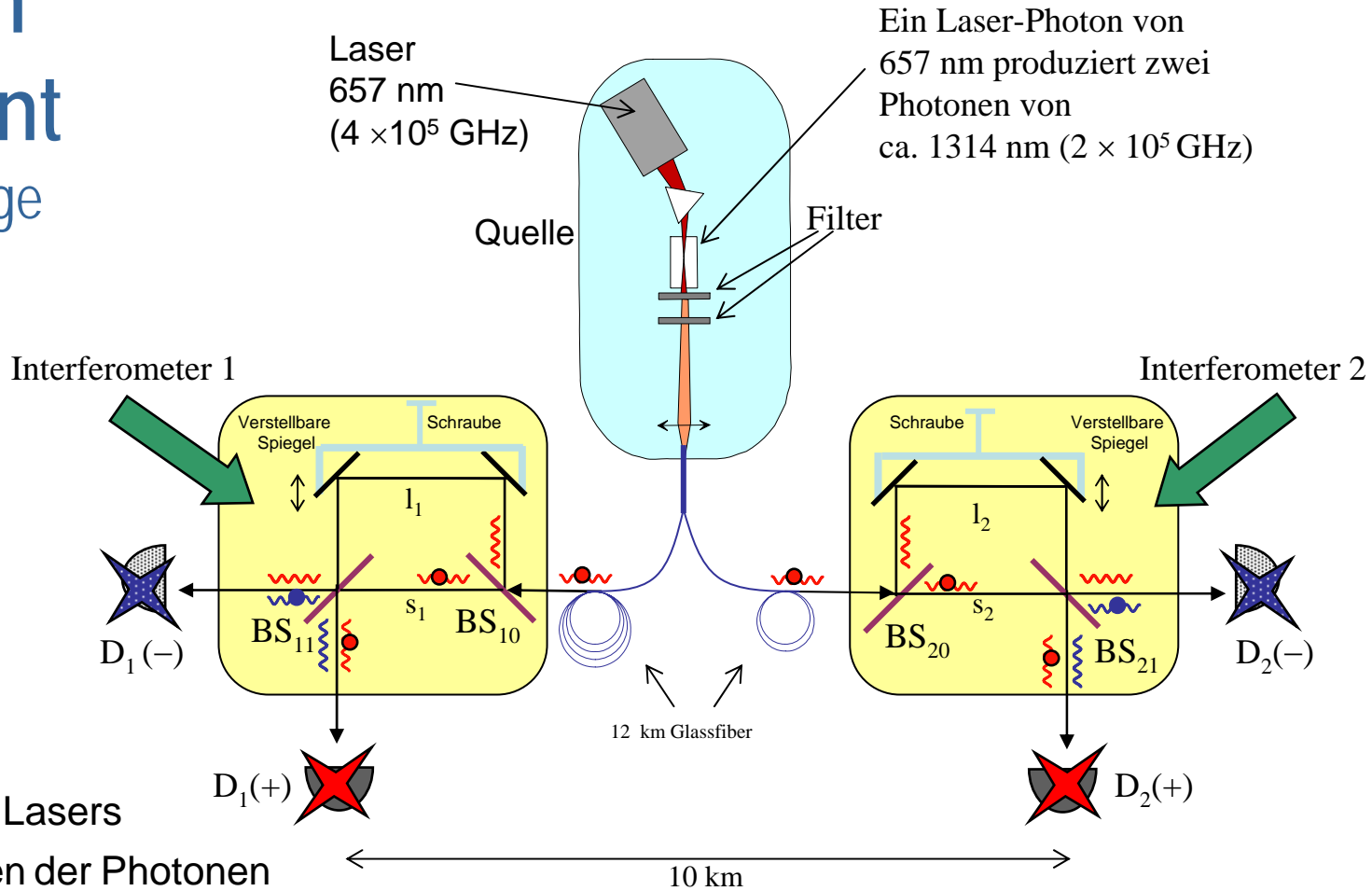


4 mögliche Ergebnisse bei der Detektion mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

++	Pr(++)	+-	Pr(+)
--	Pr(--)	-+	Pr(-)

2-Teilchen Experiment

4 mögliche Wege



ω : Kreisfrequenz des Lasers

ω_1, ω_2 : Kreisfrequenzen der Photonen

l_1, l_2 : Länge der längeren Wege der Interferometer

s_1, s_2 : Länge der kürzeren Wege der Interferometer

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \omega_{ph} \quad \omega_2 = \frac{\omega}{2} - \omega_{ph}$$

4 mögliche Wege zu jedem Detektorpaar

$l_1 l_2$ $s_1 s_2$ $l_1 s_2$ $s_1 l_2$

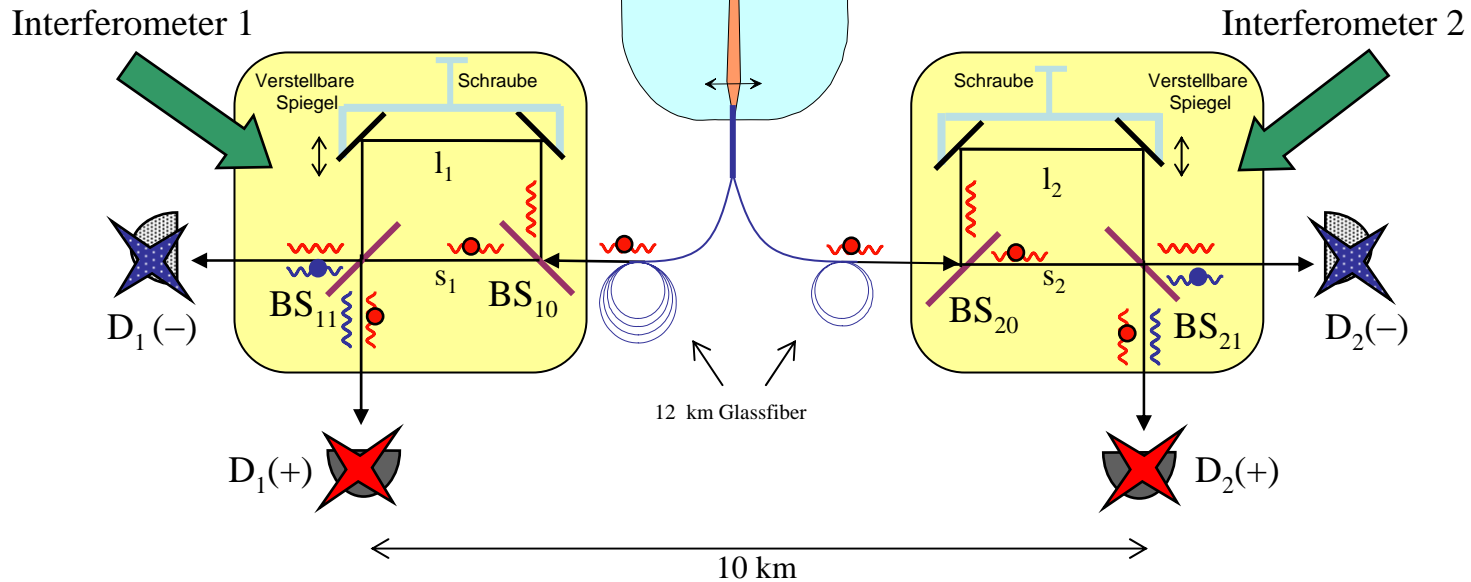
2-Teilchen Experiment 2 Bandbreiten

Laser
657 nm
(4×10^5 GHz)

Quelle

Filter

Ein Laser-Photon von
657 nm produziert zwei
Photonen von
ca. 1314 nm (2×10^5 GHz)



$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \omega_{ph}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \omega_{ph}$$

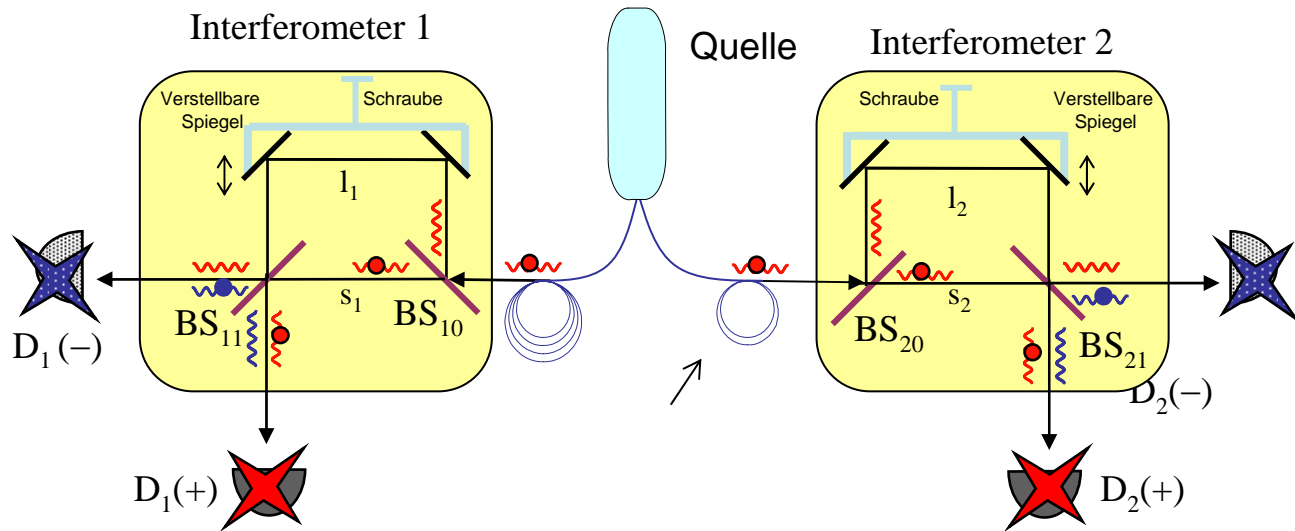
$\Delta\nu$: Bandbreite des Lasers $\approx 10\text{MHz}$
 $\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta\nu$

$\Delta\nu_{ph}$: Bandbreite der Photonen $\approx 2000\text{GHz}$
 $\Delta\omega_{ph} = 2\pi \cdot \Delta\nu_{ph}$

(Bandbreite des sichtbaren Lichtes = 500 GHz)

2-Teilchen Experiment

Amplituden der
4 Wege zu den
Detektoren
 $D_1(+)$, $D_2(+)$



Weg	Länge des Pfeils	Winkel des Pfeils
$l_1 l_2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2} + \omega_1 \frac{l_1}{c} + \frac{\pi}{2} + \omega_2 \frac{l_2}{c}$
$s_1 s_2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\omega_1 \frac{s_1}{c} + \frac{\pi}{2} + \omega_2 \frac{s_2}{c} + \frac{\pi}{2}$
$l_1 s_2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2} + \omega_1 \frac{l_1}{c} + \omega_2 \frac{s_2}{c} + \frac{\pi}{2}$
$s_1 l_2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\omega_1 \frac{s_1}{c} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \omega_2 \frac{l_2}{c}$

2-Teilchen Experiment

Die Winkel der verschiedenen Weg-Paare sind ausschlaggebend

Jedes Weg-Paar trägt zum Gesamtbeitrag bei. Wenn ein Weg-Paar keine sichtbare Interferenz ergibt, ist es für das Experiment nicht nützlich, da es die Zählrate auf 50% drückt.

2-Teilchen Experiment

Die Winkel der verschiedenen Weg-Paare sind ausschlaggebend
(Mathematische Erklärung)

Das Quadrat des resultierenden Pfeils von 4 Pfeilen hängt von den 6 möglichen Winkeln zwischen den Pfeilen ab:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{ab}$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{ab}$$

Weg
$l_1 l_2$
$s_1 s_2$
$l_1 s_2$
$s_1 l_2$



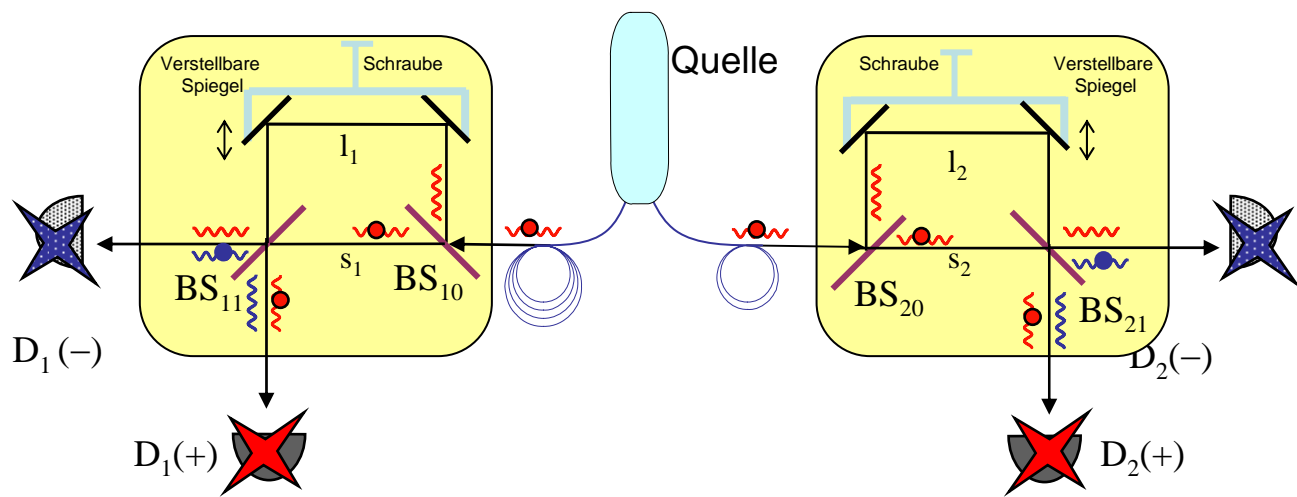
$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}|^2 &= \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2 \\ &+ 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{ab} + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \cos \theta_{ac} + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{d}| \cos \theta_{ad} + 2 |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{ba} + 2 |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \theta_{bc} + 2 |\mathbf{b}| |\mathbf{d}| \cos \theta_{bd} \\ &+ 2 |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{ca} + 2 |\mathbf{c}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{cb} + 2 |\mathbf{c}| |\mathbf{d}| \cos \theta_{cd} + 2 |\mathbf{d}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{da} + 2 |\mathbf{d}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{db} + 2 |\mathbf{d}| |\mathbf{c}| \cos \theta_{dc} \end{aligned}$$

d

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = \frac{1}{4}$$

2-Teilchen Experiment

Welche Weg-Paare ergeben sichtbare Interferenz ?



$$\Delta v \approx 10 \text{ MHz}$$

$$l_1 - s_1 \approx l_2 - s_2 \approx 0.5 \text{ m}$$

$$\frac{c}{l_1 - s_1} \approx \frac{c}{l_2 - s_2} \approx 600 \text{ MHz}$$

$$\Delta v_{ph} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ GHz}$$

$$(l_1 - s_1) - (l_2 - s_2) \approx 10 \mu\text{m}$$

$$\frac{c}{(l_1 - s_1) - (l_2 - s_2)} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ GHz}$$

Weg-Paar	Winkel zwischen den beiden Pfeilen
$l_1 \ l_2$	$\theta = \omega_1 \frac{l_1 - s_1}{c} + \omega_2 \frac{l_2 - s_2}{c} = \left(\frac{\omega}{2} + \omega_{ph} \right) \frac{l_1 - s_1}{c} + \left(\frac{\omega}{2} - \omega_{ph} \right) \frac{l_2 - s_2}{c}$ $= \frac{\omega}{2} \frac{l_1 - s_1}{c} + \frac{\omega}{2} \frac{l_2 - s_2}{c} + \omega_{ph} \frac{(l_1 - s_1) - (l_2 - s_2)}{c}$
$s_1 \ s_2$	
$l_1 \ s_2$	$\theta = \omega_1 \frac{l_1 - s_1}{c} + \omega_2 \frac{s_2 - l_2}{c} = \left(\frac{\omega}{2} + \omega_{ph} \right) \frac{l_1 - s_1}{c} + \left(\frac{\omega}{2} - \omega_{ph} \right) \frac{s_2 - l_2}{c}$ $= \frac{\omega}{2} \frac{l_1 - s_1}{c} - \frac{\omega}{2} \frac{l_2 - s_2}{c} + \omega_{ph} \frac{(l_1 - s_1) + (l_2 - s_2)}{c}$
$s_1 \ l_2$	

Von den 6 Weg-Paare ($l_1 l_2 - s_1 s_2$, $l_1 l_2 - l_1 s_2$, $l_1 l_2 - s_1 l_2$, $s_1 s_2 - l_1 s_2$, $s_1 s_2 - s_1 l_2$, $l_1 s_2 - s_1 l_2$)
Nur das Paar $l_1 l_2 - s_1 s_2$ ergibt Interferenz